VI. POLINOMI ORTOGONALI

1 Definizioni e Risultati Generali

Sia I un intervallo della retta reale, sia limitato sia non limitato. Sia $\rho(x)$ una funzione non negativa e misurabile su I tale che $\int_I \rho(x)\,dx < +\infty$ e $\rho(x) > 0$ quasi ovunque. Sia $L_2(I;\rho(x)dx)$ lo spazio di Hilbert di tutte le funzioni misurabili (identificando le funzioni uguali quasi ovunque) $f : I \to \mathbb{C}$ tali che $\int_I |f|^2\rho\,dx < +\infty$, con prodotto scalare

$$(f,g)_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx.$$

Inoltre supponiamo che gli integrali $\int_I |x|^n\rho(x)\,dx < +\infty$ $(n = 0,1,2,\cdots)$.[1] Quest'ipotesi implica che tutti i polinomi appartengono ad $L_2(I;\rho(x)\,dx)$.

Partendo dalla successione $\{1,x,x^2,x^3,\cdots\}$ di funzioni linearmente indipendenti, possiamo applicare il processo di Gram-Schmidt, cioè lo schema ricorrente

$$p_0 = \frac{e_0}{\|e_0\|_\rho}, \qquad p_{n+1} = \frac{e_{n+1} - \sum_{j=0}^{n}(e_{n+1},p_j)_\rho\,p_j}{\|e_{n+1} - \sum_{j=0}^{n}(e_{n+1},p_j)_\rho\,p_j\|_\rho},$$

dove $e_j(x) = x^j$ per $j \ge 0$, per costruire una successione $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ con le seguenti proprietà:

1. I polinomi $p_n(x)$ sono reali.
2. Il grado del polinomio $p_n(x)$ è uguale ad n.
3. Il coefficiente principale di $p_n(x)$ (cioè, quello di x^n) è positivo.
4. I polinomi sono ortonormali, cioè

$$(p_n,p_m)_\rho = \int_I p_n(x)\overline{p_m(x)}\rho(x)\,dx = \delta_{n,m}.$$

Siccome l'insieme dei polinomi è denso in $L_2(I;\rho(x)dx)$ [Non lo dimostreremo!], risulta una base ortonormale dello spazio di Hilbert $L_2(I;\rho(x)dx)$.

[1] Se I è limitato, quest'ipotesi vale automaticamente.

Esiste un'unica successione di polinomi p_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ con le proprietà (1)-(4). Questi polinomi si chiamano i *polinomi ortogonali* rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_\rho$ (oppure rispetto al "peso" $\rho(x)$).

Lemma 1.1 *Si ha $(f, p_n)_\rho = 0$ per ciascun polinomio f di grado $< n$.*

Dimostrazione. Sia f un polinomio di grado $< n$. Allora f è una combinazione lineare dei polinomi $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$. Siccome $(p_j, p_n)_\rho = 0$ per $j = 0, 1, \cdots, n-1$, risulta $(f, p_n)_\rho = 0$. $\square$

Teorema 1.2 *Gli zeri del polinomio p_n sono tutti semplici e contenuti all'interno dell'intervallo I.*

Dimostrazione. Sia $I = (a, b)$ dove $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo che p_n ha m (con $m < n$) zeri $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ in (a, b) e $n - m$ zeri in $\mathbb{C} \setminus (a, b)$. Allora p_n ammette la rappresentazione

$$p_n(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m) q(x),$$

dove q è un polinomio di grado $n - m$ che non cambia segno in (a, b); dunque $q(x) \geq 0$ per $x \in (a, b)$. Consideriamo il polinomio f definito da

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m).$$

Secondo il Lemma 1.1 risulta $(f, p_n)_\rho = 0$. In particolare,

$$0 = (f, p_n)_\rho = c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) \rho(x)\, dx,$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa. Ciò implica che $c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) \rho(x) = 0$ quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude pertanto che tutti gli zeri di p_n appartengono ad (a, b).

Per escludere l'esistenza di zeri multipli di p_n, rappresentiamo p_n come

$$p_n(x) = c(x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_r)^{m_r},$$

dove $\beta_1, \cdots, \beta_r$ sono gli zeri distinti di p_n e $m_1 + \cdots + m_r = n$. Bisogna dimostrare che $r = n$, $m_1 = \cdots = m_n = 1$ e $c > 0$. Se esiste un indice j con $m_j > 1$, definiamo $n_j = 0$ se m_j è pari e $n_j = 1$ se m_j è dispari (cioè, se $m_j = 3, 5, 7, \cdots$). Poi consideriamo il polinomio g definito da

$$g(x) = (x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{m_{j-1}} (x - \beta_j)^{n_j} (x - \beta_{j+1})^{m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{m_r}.$$

Siccome il grado di g è strettamente minore di n, si ha $(g, p_n)_\rho = 0$. In altre parole

$$0 = c \int_I (x - \beta_1)^{2m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{2m_{j-1}} (x - \beta_j)^{m_j + n_j} (x - \beta_{j+1})^{2m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{2m_r},$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa.[2] Quindi la funzione sotto il segno dell'integrale si annulla quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude che tutti gli n zeri di p_n sono semplici. $\square$

I polinomi ortogonali soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini. Se si conoscono i coefficienti in tale relazione, risulta un metodo veloce (in particolare, dal punto di visto numerico) per calcolarli.

Teorema 1.3 *Sia* $\alpha_n = (xp_{n+1}, p_n)_\rho$, $c_n = (xp_n, p_n)_\rho$ *e* $\alpha_{-1} = 0$. *Allora*

$$(x - c_n)p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \alpha_{n-1}p_{n-1}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Dimostrazione. Siccome $xp_n(x)$ è un polinomio di grado $n+1$, è una combinazione lineare di $p_0, p_1, \cdots, p_n, p_{n+1}$. Purtroppo

$$(xp_n, p_j)_\rho = \int_I p_n(x) \cdot xp_j(x)\rho(x)\, dx = 0, \qquad j < n-1,$$

poichè $xp_j(x)$ con $j < n-1$ è un polinomio di grado $< n$. Quindi $xp_n(x)$ è una combinazione lineare di soltanto tre polinomi ortogonali: p_{n-1}, p_n, p_{n+1}. Scriviamo

$$xp_n(x) = c_n p_n(x) + \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_{n-1}(x),$$

dove non c'è il terzo termine nella parte a destra per $n = 0$. Si vede facilmente che

$$\begin{cases} \alpha_n = (xp_n, p_{n+1})_\rho \\ \beta_n = (xp_n, p_{n-1})_\rho = (xp_{n-1}, p_n)_\rho = \alpha_{n-1} \\ c_n = (xp_n, p_n)_\rho. \end{cases}$$

Abbiamo dimostrato la tesi. $\square$

2 Esempi

Discutiamo alcuni esempi notevoli.

1. $I = (-1, 1)$, $\rho(x) \equiv 1$. In tal caso i polinomi ortogonali sono proporzionali ai polinomi di Legendre $P_n(x)$. Infatti, la normalizzazione $\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\, dx = 2/(2n+1)$ implica

   $$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x),$$

   dove $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ e $(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$.

[2] Si osservi che $m_j + n_j$ è pari.

2. $I = (-1, 1)$, $\rho(x) = (1 - x^2)^m$ dove $m = 0, 1, 2, \cdots$. Le funzioni associate di Legendre $P_l^m(x)$ hanno la forma [Vladimirov, p. 333]

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \mathcal{P}_l^m(x),$$

dove $l = m, m+1, m+2, \cdots$ e $\mathcal{P}_l^m(x)$ è un polinomio di grado $l - m$ tale che $P_l^0(x) = \mathcal{P}_l^0(x) = P_l(x)$ è il polinomio di Legendre di grado l. Le funzioni associate di Legendre soddisfano la relazione di ortogonalità

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x)\, dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\, \delta_{l,l'}.$$

Quindi i polinomi ortogonali sono

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+2m+1}{2} \frac{n!}{(n+2m)!}}\, \mathcal{P}_{n+m}^m(x).$$

3. Applicando il binomio di Newton alla formula di De Moivre $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$, separando la parte reale da quella immaginaria e utilizzando $(i)^{2k} = (-1)^k$, si trovano le rappresentazioni

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \sum_{\substack{j=0,\cdots,n \\ n-j \text{ pari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j (-1)^{(n-j)/2} (\sin x)^{n-j} \\ &= \sum_{\substack{j=0,\cdots,n \\ n-j \text{ pari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j ((\cos x)^2 - 1)^{(n-j)/2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(nx) &= \sum_{\substack{j=0,\cdots,n \\ n-j \text{ dispari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j (-1)^{(n-j)/2} (\sin x)^{n-j-1} \\ &= \sum_{\substack{j=0,\cdots,n \\ n-j \text{ dispari}}} \binom{n}{j} (\cos x)^j ((\cos x)^2 - 1)^{(n-j-1)/2},\end{aligned}$$

sostituendo $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$ per trovare il terzo membro delle due uguaglianze. Queste equazioni mostrano che $\cos(nx)$ e $\sin((n+1)x)/\sin x$ sono polinomi di $\cos x$ di grado n con coefficiente principale positivo. Definiamo il polinomio di Chebyshev di prima specie

$$T_n(t) = \cos(nx), \qquad t = \cos x \in [-1, 1],$$

ed il polinomio di Chebyshev di seconda specie

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}, \qquad t = \cos x.$$

Questi polinomi soddisfano le relazioni di ricorrenza

$$2tT_n(t) = \frac{1}{2}\left(T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t)\right),\ T_0(t) = 1,\ T_1(t) = 1,\ T_2(t) = 2t^2 - 1;$$

$$2tU_n(t) = \frac{1}{2}\left(U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t)\right), \qquad U_0(t) = 1, \qquad U_1(t) = 2t.$$

Queste relazioni seguono facilmente dalle formule di addizione per le funzioni trigonometriche. Finalmente proviamo le relazioni di ortogonalità. Si ha (sostituendo $t = \cos x$)

$$\int_{-1}^{1} T_n(t)T_m(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m};$$

$$\int_{-1}^{1} U_n(t)U_m(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^\pi \sin((n+1)x)\sin((m+1)x) = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}.$$

In altre parole, i polinomi ortogonali per $I = (-1,1)$ e $\rho(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ sono

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2-\delta_{n,0}}{\pi}}\,T_n(t).$$

I polinomi ortogonali per $I = (-1,1)$ e $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ sono

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,U_n(t).$$

4. $I = (-1,1)$, $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, dove $\alpha, \beta > -1$. In tal caso i polinomi ortogonali sono multipli dei polinomi di Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

5. $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. In tal caso i polinomi ortogonali sono multipli dei polinomi di Hermite $H_n(x)$.

6. $I = (0,+\infty)$, $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, dove $\alpha > -1$. In tal caso i polinomi ortogonali sono i polinomi di Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$.

I polinomi di Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ contengono come casi particolari quelli di Legendre ($\alpha = \beta = 0$), di Legendre associato ($\alpha = \beta = m$ dove $m = 0,1,2,\cdots$), di Chebyshev di prima specie ($\alpha = \beta = -1/2$) e di Chebyshev di seconda specie ($\alpha = \beta = 1/2$). I polinomi di Jacobi, Hermite e Laguerre si chiamano anche i polinomi ortogonali classici. Queste classi di polinomi hanno le seguenti proprietà:

1. I polinomi di una certa classe (con α, β fissate) soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini, come tutti i polinomi ortogonali con peso fissato. I polinomi di Jacobi (con $\alpha = \beta > -1$) e di Hermite soddisfano $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$, poichè l'intervallo I è simmetrico rispetto allo zero e $\rho(x)$ è una funzione pari; quindi $c_n = (xp_n, p_n)_\rho = 0$ nelle loro relazioni di ricorrenza.

2. I polinomi di una certa classe ammettono una funzione generatrici facile:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n = 2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-t+R)^{-\alpha}(1+t+R)^{-\beta},\ R=\sqrt{1-2xt+t^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}t^n = e^{2xt-t^2}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n = (1-t)^{-\alpha-1}e^{-xt/(1-t)}.$$

3. I polinomi di una certa classe soddisfano una formula di Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^n [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}];$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}; \quad L_n^{(\alpha)}(x) = x^{-\alpha}e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{n+\alpha}e^{-x}).$$

4. I polinomi di una certa classe (con α, β fissate) sono gli autovettori di un opportuno operatore di Sturm-Liouville e quindi soddisfano un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine. Esempi:

$$(1-x^2)u''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]u'+n(n+\alpha+\beta+1)u=0,\ u(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x);$$

$$u''-2xu'+2nu=0, \qquad u(x)=H_n(x);$$
$$xu''+(\alpha+1-x)u'+nu=0, \qquad u(x)=L_n^{(\alpha)}(x).$$

Osserviamo che queste tre equazioni differenziali si possono riscrivere nella forma

$$L_{\mathrm{Jacobi}}^{(\alpha,\beta)}\, u = -\left((1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}u'\right)' = n(n+\alpha+\beta+1)\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}u;$$

$$L_{\mathrm{Hermite}}\, u = -\left(e^{-x^2}u'\right)' = 2n\, e^{-x^2}u;$$
$$L_{\mathrm{Laguerre}}^{(\alpha)}\, u = -\left(x^{\alpha+1}e^{-x}u'\right)' = n\, x^{\alpha}e^{-x}u.$$

Grazie alle analoghie tra loro, i polinomi ortogonali classici vengono spesso studiati insieme.

3 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre $P_l(\xi)$ si possono definire nei seguenti modi:

1. tramite la formula generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\xi h+h^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\xi)h^l,$$

2. tramite l'equazione differenziale,

$$-[(1-x^2)P_l']'(x) = l(l+1)P_l(x), \; -1 < x < +1; \qquad P_l(1) = 1,$$

3. tramite l'ortogonalità: $P_l(\xi)$ sono i polinomi in ξ di grado l con coefficiente principale positivo tali che

$$\int_{-1}^{1} P_l(\xi)P_{l'}(\xi) = \delta_{ll'}\frac{2}{2l+1},$$

4. tramite la formula di Rodrigues

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l\, l!}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^l (\xi^2-1)^l,$$

5. tramite la formula di ricorrenza

$$(2l+1)\xi P_l(\xi) = (l+1)P_{l+1}(\xi) + lP_{l-1}(\xi), \qquad P_0(\xi) = 1, \qquad P_1(\xi) = \xi.$$

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

$\underline{4 \Rightarrow 2}$. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-[(1-x^2)u']'(x) = \lambda u(x), \qquad -1 < x < +1, \tag{3.1}$$

sotto le condizioni iniziali che i limiti di $u(x)$ per $x \to \pm 1$ esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per $\lambda = l(l+1)$ dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Verifichiamo se i polinomi

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l, \qquad l = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.2}$$

soddisfano la (3.1) per $\lambda = l(l+1)$. Questi polinomi (di grado l) sono detti *polinomi di Legendre* e la (3.2) si dice *formula di Rodrigues*. Infatti, ponendo $W_l(x) = (x^2-1)^l$ e derivando l'identità

$$(x^2-1)W_l'(x) - 2l\,xW_l(x) = 0$$

$l+1$ volte, si ottiene

$$(x^2-1)W_l^{(l+2)}(x) + 2xW_l^{(l+1)}(x) - l(l+1)W_l^{(l)}(x) = 0.$$

Dunque la funzione $W_l^{(l)}(x) = 2^l(l!)P_l(x)$ soddisfa l'equazione (3.1). Inoltre,

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l\, l!}\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^s (x-1)^l\right)\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-s}(x+1)^l\right) \\ &= \frac{1}{2^l\, l!}\sum_{s=0}^{l}\left(\frac{l!}{(l-s)!}(x-1)^{l-s}\right)\left(\frac{l!}{s!}(x+1)^s\right), \end{aligned}$$

il quale implica che $P_l(1) = 1$ e $P_l(-1) = (-1)^l$.

$\underline{2 \Rightarrow 4}$. Sostituendo $u(x) = P_l(x)z(x)$ e $w(x) = u'(x)$ nella (3.1) con $\lambda = l(l+1)$, otteniamo l'equazione separabile

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2\frac{P_l'(x)}{P_l(x)} + \frac{2x}{1-x^2},$$

implicando che

$$y(x) = c_1 P_l(x) + c_2 P_l(x) \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)P_l(t)^2}.$$

L'integrale nell'ultima espessione è divergente in $x = \pm 1$ (poichè $P_l(\pm 1)^1 = 1]$. Quindi $P_l(x)$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale (3.1) con $\lambda = l(l+1)$ che soddisfa $P_l(1) = 1$. Siccome la formula di Rodrigues rappresenta una tale soluzione, si ottiene la formula di Rodrigues dalla proprietà 2.

$\underline{(2+4) \Rightarrow 3}$. Si dimostra facilmente che i polinomi di Legendre sono ortogonali nello spazio $L_2(-1,1)$. Infatti, utilizzando la (3.1) si ha

$$\begin{aligned} &[l(l+1) - k(k+1)] \int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[P_l(k) \left[(1-x^2)P_k'\right]' - P_k(x) \left[(1-x^2)P_l'\right]' \right] dx \\ &= -\int_{-1}^1 \left[P_l'(k)(1-x^2)P_k'(x) - P_k'(x)(1-x^2)P_l'(x) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti. Quindi $(P_l, P_k) = \displaystyle\int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x)\,dx = 0$ se $l \neq k$. Per trovare il fattore di normalizzazione, calcoliamo (P_l, P_l) tramite l integrazioni per parti consecutive. Otteniamo

$$\begin{aligned} (P_l, P_l) &= \frac{(-1)^l}{2^{2l}\cdot(l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l}\cdot(l!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^l\,dx = \frac{(2l)!}{2^{2l}\cdot(l!)^2}\, \frac{2^{l+1}\cdot l!}{(2l+1)(2l-1)\cdots 1} = \frac{2}{2l+1}, \end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula di ricorrenza $(I_{l-1}/I_l) = 1 + (1/2l)$, $I_0 = 2$, per $I_l = \int_{-1}^1 (1-x^2)^l\,dx$. Quindi $\sqrt{l+\frac{1}{2}}\,P_l(x)$ ha norma 1 in $L_2(-1,1)$.

$\underline{(3+4) \Rightarrow 5}$. Per trovare una formula di ricorrenza per i polinomi di Legendre calcoliamo prima il prodotto scalare (P_{l+1}, xP_l). Infatti, dopo $l+1$ integrazioni

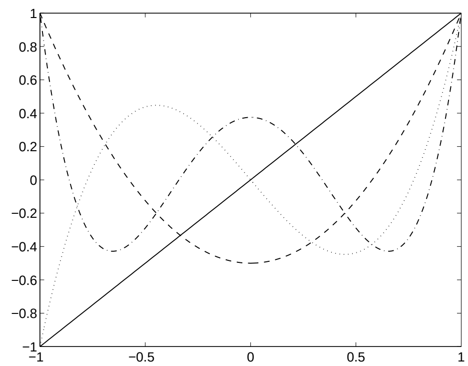

Figura 3.1: I polinomi di Legendre di ordine 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

per parti consecutive e utilizzando $(x\,f)^{(l+1)} = x\,f^{(l+1)} + (l+1)\,f^{(l)}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
(P_{l+1}, xP_l) &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1}\cdot((l+1)!)(l!)}\cdot \\
&\cdot \int_{-1}^{1}(x^2-1)^{l+1}\left[x\left(\frac{d}{dx}\right)^{2l+1}(x^2-1)^l + (l+1)\left(\frac{d}{dx}\right)^{2l}(x^2-1)^l\right]dx \\
&= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1}\cdot(l!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{l+1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2l}(x^2-1)^l\,dx \\
&= \frac{1}{2^{2l+1}\cdot(l!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{l+1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2l}(x^2-1)^l\,dx \\
&= \frac{(2l)!}{2^{2l+1}\cdot(l!)^2}\,\frac{2^{l+2}\cdot(l+1)!}{(2l+3)(2l+1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}.
\end{aligned}$$

Siccome i polinomi di Legendre sono ortogonali, essi sono linearmente indipendenti. Dunque

$$(2l+1)xP_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x),$$

dove $a_j = 0$ per $j > l+1$ [poichè $xP_l(x)$ ha grado $l+1$]. Risultano $(2l+1)(xP_l, P_j) = (2l+1)(P_l, xP_j) = 0$ per $l < j-1$ [poichè $xP_j(x)$ ha grado $< l$] e $(2l+1)(xP_l, P_l) = 0$ [poichè $xP_l(x)^2$ è una funzione dispari]. Quindi

$$(2l+1)xP_l(x) = a_{l+1}P_{l+1}(x) + a_{l-1}P_{l-1}(x).$$

Infine troviamo

$$\begin{aligned}
(2l+1)(xP_l, P_{l+1}) &= a_{l+1}(P_{l+1}, P_{l+1}) = a_{l+1}(2/(2l+3)); \\
(2l+1)(xP_{l-1}, P_l) &= a_{l-1}(P_{l-1}, P_{l-1}) = a_{l-1}(2/(2l-1)).
\end{aligned}$$

Quindi $a_{l+1} = l + 1$ e $a_{l-1} = l$. Risulta la *formula di ricorrenza*

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + l\,P_{l-1}(x), \qquad P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x. \tag{3.3}$$

Per induzione matematica si dimostrano facilmente

$$P_l(1) = 1, \qquad P_l(-1) = (-1)^l, \qquad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x);$$

$$-1 \leq P_l(x) \leq +1, \qquad -1 \leq x \leq +1. \tag{3.4}$$

$\underline{5 \Rightarrow 1}$. Dimostriamo ora la *formula generatrice*

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l = \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}, \qquad |h| < 1. \tag{3.5}$$

Infatti, scriviamo $F(x,h)$ per la parte a sinistra della (3.5). Per $|h| < 1$ è permessa la derivazione termine a termine rispetto ad h, grazie alla (3.4). Si trovano facilmente le seguenti espressioni:

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)xP_l(x)h^l = xF(x,h) + 2xh\sum_{l=0}^{\infty} l\,P_l(x)h^{l-1} = xF(x,h) + 2xh\frac{\partial F}{\partial h};$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)P_{l+1}(x)h^l = \sum_{l=1}^{\infty} l\,P_l(x)h^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty} l\,P_l(x)h^{l-1} = \frac{\partial F}{\partial h};$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} l\,P_{l-1}(x)h^l = h^2\sum_{l=1}^{\infty}(l-1)P_{l-1}(x)h^{l-2} + h\sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)h^{l-1}$$

$$= h^2\frac{\partial F}{\partial h} + hF(x,h).$$

Applicando la (3.3) si ha

$$xF(x,h) = (1-2xh+h^2)\frac{\partial F}{\partial h} + hF(x,h),$$

dove $F(x,0) = P_0(x) = 1$. Oppure:

$$\frac{\partial F/\partial h}{F(x,h)} = \frac{x-h}{1-2xh+h^2}, \qquad F(x,0) = 1.$$

La soluzione unica di questo problema di Cauchy è la funzione $F(x,h)$ data dalla parte a destra della (3.5).

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Scrivendo $F(x,h)$ per la parte a destra nella (3.5) risulta (dopo alcuni calcoli)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -h\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 (hF(x,h)).$$

In altre parole,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l\right) = -\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)P_l(x)h^l.$$

Ciò implica l'equazione differenziale. Infine, sostituendo $x = 1$ nella (3.5) si ha

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(1)h^l = \frac{1}{\sqrt{(1-h)^2}} = \frac{1}{1-h},$$

implicando $P_l(1) = 1$.